Conteúdos

Conceito de derivada de uma função num ponto

Interpretação geométrica

Interpretação física

Derivadas laterais

Derivabilidade e continuidade

Função derivável

Regras de derivação de uma função

Derivação de uma função composta

Segunda derivada de uma função

Aplicações das derivadas

Referência histórica

Isaac Newton (1642-1727 e **Gottfried Leibniz** (1646-1716), de forma quase simultânea e independente, descobrem um método geral para a resolução de problemas associados ao problema da tangente a uma dada curva (Cálculo Diferencial) e, por outro lado, aos problemas de áreas delimitadas por curvas e volumes de sólidos gerados por revolução (Cálculo Integral).

Subtema 1 - Derivadas e aplicações

Conceito de derivada de uma função num ponto

A noção de derivada de uma função e as regras da sua aplicação constituem o que é conhecido por cálculo diferencial que tem a sua origem, no século XVII, com Leibniz (1646-1716) e Newton (1642-1727).

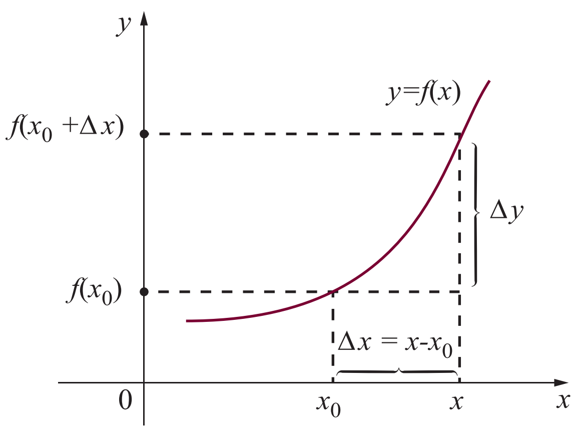
O conceito de derivada está presente, por exemplo, na determinação da evolução do crescimento de uma certa população, nos índices de desenvolvimento económico de um país ou, na determinação das variações das temperaturas ou, no cálculo das velocidades de corpos ou objetos em movimento.

Considera uma função real de variável real definida por $y = f(x)$ e x_0 um ponto qualquer do seu domínio Df .

Seja $x \in Df$ ($x \neq x_0$),

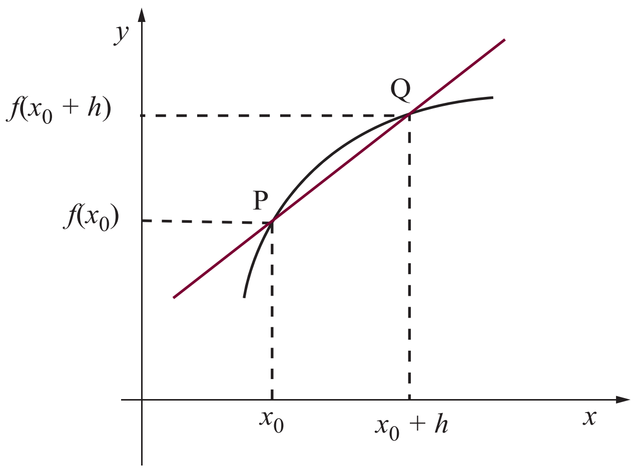
Chama-se **acréscimo** ou incremento da variável no ponto x_0 à diferença $\Delta x = x - x_0$ (também se escreve $h = x - x_0$).

Chama-se **acréscimo** ou incremento da função no ponto x_0 à diferença $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ ou $\Delta f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0)$.



Considera a curva que representa o gráfico de uma função contínua *f* num ponto P de abcissa $x_0 \in Df$.

Seja agora outro ponto Q do gráfico de *f*, cujas coordenadas são $(x_0 + h, f(x_0 + h))$, onde *h* é o acréscimo da variável no ponto de abcissa x_0, ocorrido do ponto P ao ponto Q.



Recorda:

Uma função diz-se contínua num ponto $x = a$ do seu domínio se e só se existe $\lim_{x\to a} f(x)$ e $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

A reta que passa por P e Q é secante à curva representativa de $y = f\left(x\right)$. O declive desta reta é determinado pela razão dos acréscimos (razão incremental) da função f com respeito à variável x, no ponto x_0 conhecida por:

Quociente de Newton: $Q(x_0,h) = \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$.

Derivada de uma função, definida por $y = f(x)$, num ponto $x_0 \in Df$ é o limite (se existe) da razão $N(x_0,h)$, quando o acréscimo da variável tende para zero e escreve-se:

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} Q(x_0,h) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

Outras notações

$y'(x_0)$ ou $\left[\dfrac{dy}{dx}\right]_{x=x_0}$ ou $\left[\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right]_{x=x_0}$

$D_x f(x_0)$ ou $\dfrac{df}{dx}(x_0)$

...lê-se derivada de y ou, derivada da função f, no ponto x_0.

Se o limite existe e é finito, a função diz-se **diferenciável** e a diferença $x - x_0$ representa uma pequena variação de x, próxima de x_0, ou seja $h = x - x_0$ ou, $x = x_0 + h$ e a derivada da função f em $x_0 \in Df$ pode ser também expressa por: $f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Exemplo:

Usando a definição de derivada de uma função num ponto, calcular:

a) $f'(-1)$, sendo $f(x) = 2x^3 + x + 1$.

Temos $f'(-1) = \lim_{x\to -1} \dfrac{f(x) - f(-1)}{x-(-1)} = \lim_{x\to -1} \dfrac{2x^3 + x + 1 + 2}{x+1} = \lim_{x\to -1} \dfrac{2x^3 + x + 3}{x+1}$

Que é uma indeterminação do tipo $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ que pode ser 'levantada', usando a regra de Ruffini para fatorizar o polinómio do numerador. Ou seja,

Regra de Ruffini

	2	0	1	3
-1		-2	2	-3
2		-2	3	0=Resto

$$\lim_{x \to -1} \frac{2x^3 + x + 3}{x+1} = \lim_{x \to -1} \frac{(x+1)(2x^2 - 2x + 3)}{x+1} = \lim_{x \to -1} (2x^2 - 2x + 3) = 7$$

Então, $f'(-1) = 7$.

Tarefa 1

Usando a definição de derivada de uma função num ponto calcula:

a) $f'(-1)$, sendo $f(x) = x^2 + 1$

b) $f'(2)$, sendo $f(x) = \frac{1}{x}$

b) $f'(0)$, sendo $f(x) = \frac{1}{x+2}$.

Temos, $f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{h+2} - \frac{1}{2}}{h}$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\frac{2-h-2}{2(h+2)}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-h}{2h(h+2)} = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{2(h+2)} = -\frac{1}{4}.$$ Então, $f'(0) = -\frac{1}{4}$.

c) $f'(1)$, sendo $f(x) = e^{2x}$.

Recorda:

o limite notável

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Temos, $f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^{2(1+h)} - e^2}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{e^{2(1+h)} - e^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^2.e^{2h} - e^2}{h} = e^2. \lim_{h \to 0} \frac{e^{2h} - 1}{h} = 2e^2 \lim_{h \to 0} \frac{e^{2h} - 1}{2h}$$

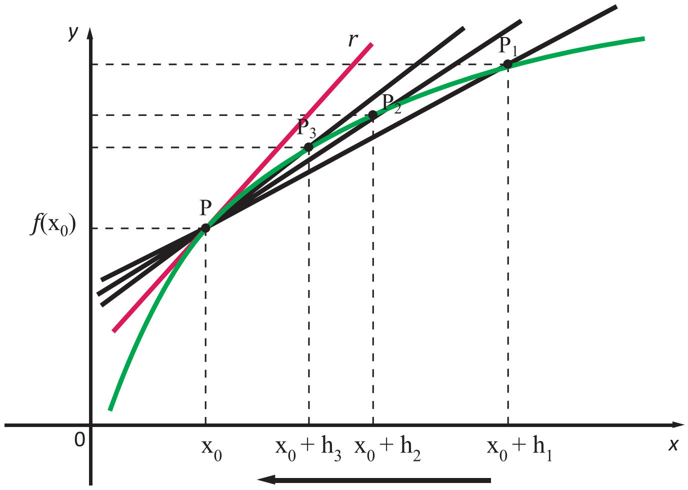
Fazendo uma mudança de varável $y = 2h$,

$$2e^2 \lim_{h \to 0} \frac{e^{2h} - 1}{2h} = 2e^2 \underbrace{\lim_{y \to 0} \frac{e^y - 1}{y}}_{\text{limite notável}} = 2e^2 \times 1 = 2e^2.$$

Interpretação geométrica da derivada

Vejamos como a derivada representa o declive da reta tangente à curva que representa o gráfico de uma função num ponto do seu domínio.

Fixe-se um ponto qualquer (arbitrário) P_1 cujas coordenadas são $(x_0 + h_1, f(x_0 + h_1))$ sobre a curva que representa a função. A reta que passa por P e P_1 é secante à curva.

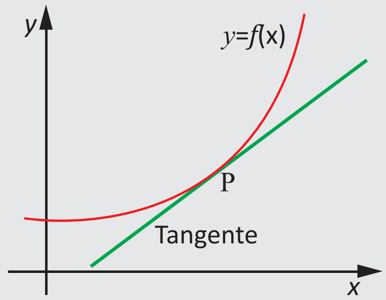


Na figura:

- Os pontos $P_1, P_2, P_3, \ldots$ pertencem ao gráfico de *f* e as suas abcissas estão cada vez mais próximas de x_0 .
- Os declives das retas secantes definidas pelos pontos $PP_1, PP_2, \ldots, PP_i, \ldots$ estão cada vez mais próximas do declive da reta *r*, tangente ao gráfico de *f* no ponto *P*.
- Fazer os P_i se aproximarem de P consiste em fazer os valores de $h_1,\ h_2,\ h_3,\ \ldots$ tenderem para zero, isto é, tomar os valores de h arbitrariamente próximos de 0.

Nota:

A reta tangente à curva no ponto P é aquela que contém o ponto e que "melhor aproxima" o gráfico da função na vizinhança deste ponto.



Observamos que:

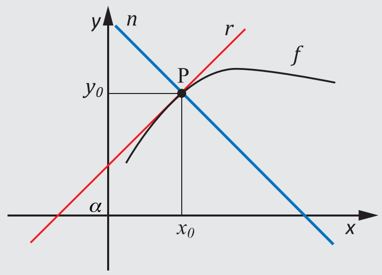
1. Quando os P_i estão próximos de P , o declive da reta secante deve estar próximo do declive limite da reta tangente ao gráfico no ponto P . Ou seja, quando $h \to 0$ e a razão incremental se aproxima do valor finito *m*, dizemos que *m* é o limite (se existe) da razão incremental com *h* tendendo para zero e escrevemos:

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} .$$

2. Se a função *f* for contínua num ponto $P(x_0, f(x_0))$ então a reta tangente à curva que representa o gráfico da função no ponto P , tem equação $y - f\left(x_0\right) = m\left(x - x_0\right)$, onde $m = f'(x_0)$ é o declive da reta.

Nota

A reta ***normal*** ao gráfico de f no ponto $P(x_0, y_0)$ é uma reta perpendicular à reta tangente neste ponto.



A equação da reta normal é

$(y - y_0) = -\frac{1}{m}(x - x_0)$, sendo m o declive (coeficiente angular) da reta tangente t .

Exemplo:

O declive da reta tangente ao gráfico da função quadrática $f\left(x\right) = x^2$, no ponto de coordenadas (1,1), é dado por:

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(2+h)}{h} = \lim_{h \to 0} (2+h) = 2$$

Logo, a reta tangente ao gráfico da função em (1,1) tem de equação

$y - f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y = 2x - 1.$

Exemplo:

Dada a função $f(x)=\sqrt{x}$, o declive *m* da reta tangente ao gráfico da função no ponto de coordenadas (1,1) é dado por

$$m_t = f'(1) = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{1+h}-1}{h}.$$

Este limite é uma indeterminação do tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$. Para resolver esta indeterminação, podemos racionalizar o numerador, multiplicando e dividindo a fracção pela expressão conjugada do denominador (ver nota ao lado).

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{1+h}-1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{1+h}-1)(\sqrt{1+h}+1)}{h(\sqrt{1+h}+1)} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{1+h})^2-1^2}{h(\sqrt{1+h}+1)} = \lim_{h\to 0}\frac{1+h-1}{h(\sqrt{1+h}+1)} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt{1+h}+1)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+h}+1} = \frac{1}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{1}{2}$$

Logo, a reta tangente ao gráfico da função em (1,1) tem de equação

$$y - f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}.$$

Tarefa 2

Dada a função $f(x)=x^3$, determina a equação da reta tangente ao gráfico de f, no ponto $P(1,1)$.

Em resumo, a derivada de uma função *f* em um ponto x_0 pode ser interpretada geometricamente como o declive da reta tangente ao gráfico de *f* no ponto $(x_0, f(x_0))$.

Nota:

Se para cada valor de *t* (tempo), $f(t)$ representar a distância percorrida por um corpo em movimento até ao instante *t*, então a velocidade do móvel no instante t_0, é a derivada da função f no ponto t_0, tal como a aceleração é a derivada da velocidade no mesmo instante t_0.

Interpretação física da derivada

Velocidade e aceleração são noções conhecidas da Física.

Quando dirigimos um veículo, podemos medir a distância percorrida num certo intervalo de tempo. O velocímetro de um automóvel marca, a cada instante, a variação da distância percorrida e a velocidade. Se pisarmos no acelerador ou no travão, percebemos que a velocidade muda. Então sentimos a aceleração.

Suponhamos que um corpo se move em linha reta e que $s(t)$ representa o espaço percorrido pelo móvel até ao instante t. No intervalo de tempo $[t, t+\Delta t[$ o corpo sofre um deslocamento que pode ser representado por:

$$\Delta s = s(t+\Delta t) - s(t).$$

O quociente entre o espaço percorrido e o tempo gasto em percorrê-lo, ou seja $v_m = \dfrac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}$, corresponde à **velocidade média** nesse intervalo de tempo.

Tarefa 3

Admite que a altura *h* (em metros), *t* segundos após ter sido disparada uma bala, de uma arma na vertical, de baixo para cima. é dada pela expressão $h(t) = 410t - t^2$.

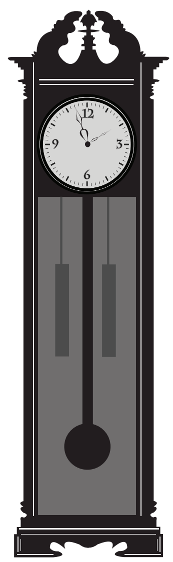
Qual é a velocidade (em metros por segundo) da bala, dois segundos após o disparo?

De modo geral, a velocidade média nada nos diz sobre a velocidade do corpo no instante *t*. Para obtermos a **velocidade instantânea** do corpo no instante *t*, calculamos sua velocidade média em instantes de tempo *t* cada vez menores.

A velocidade instantânea (ou velocidade no instante *t*) é o limite das velocidades médias quando Δt se aproxima de zero, isto é, $v(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}$.

A derivada de uma função *f* em um ponto x_0 pode ser interpretada, na Física, como a velocidade instantânea de um corpo em deslocamento dado pela função *f* no instante de tempo x_0.

Exemplo:



Um pêndulo de um relógio oscila para a esquerda e para a direita. A função posição é dada por $p(t) = t^2 - 6t$, onde $p(t)$ é medida em metros e em *t* segundos. Determina:

a) Qual a variação num instante $t = t_0$ qualquer?

A variação média do pêndulo no intervalo de tempo Δt é dada por:

$$V_M = \frac{p(t_0+\Delta t)-p(t_0)}{\Delta t} = \frac{\left[(t_0+\Delta t)^2 - 6(t_0+\Delta t) - (t_0^2 - 6t_0)\right]}{\Delta t} =$$

$$\frac{t_0^2 + 2t_0\Delta t\Delta t^2 - 6t_0 - 6\Delta t - t_0^2 + 6t_0}{\Delta t^2} = \frac{2t_0\Delta t + \Delta t^2 - 6\Delta t}{\Delta t} = 2t_0 + \Delta t - 6$$

A variação no instante $t = t_0$ é dada por:

$$V(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p(t_0+\Delta t)-p(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}(2t_0 + \Delta t - 6) = 2t_0 - 6.$$

b) Qual a variação instantânea do pêndulo em *t* = 0 e *t* = 4?

Se $t_0 = 0 \Rightarrow V(0) = 2 \times 0 - 6 = -6$ metros/segundo

Se $t_0 = 4 \Rightarrow V(4) = 2 \times 4 - 6 = 2$ metros/segundo

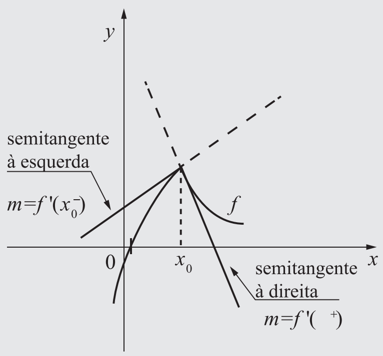
c) Em que instante a variação é nula?

Como $V(t_0) = 0 \Rightarrow t_0 = 3$, o pêndulo não está em movimento no instante 3 segundos.

Derivadas laterais

Nota:

Geometricamente, a derivada à esquerda de x_0 representa o declive da semitangente à esquerda e a derivada à direita de x_0 representa o declive da semitangente à direita de x_0.



Recorda que o limite de uma função num ponto existe se e só se os limites laterais existem e são iguais. Como a derivada de uma função num ponto é um limite, esta derivada somente existirá em condições análogas.

Seja uma função definida por $y = f(x)$ e $x_0 \in Df$ um ponto do seu domínio tal que $\left]x_0 - x, x_0\right]$ para um $x \in IR^+$.

A derivada lateral esquerda (ou derivada à **esquerda**) de *f* em x_0 é dada por: $f'_-(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

De modo análogo, se $x_0 \in Df$ um ponto do seu domínio tal que $\left]x_0, x_0 + x\right]$ para um $x \in IR^+$, então a derivada lateral direita (ou derivada à **direita**) de *f* em x_0 é dada por: $f_+'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Exemplo:

Determina, usando a definição de derivada de uma função num ponto, $f'(1)$, sendo $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x < 1 \\ 2x - 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$.

$$f_-'(1) = \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^-}(x+1) = 2.$$

$$f_+'(1) = \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{2x - 1 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{2(x-1)}{x-1} = 2.$$

Como $f_-'(1) = 2 = f_+'(1)$, então *f* é derivável e $f'(1) = 2$.

Tarefa 4

Verifica se a função definida em IR por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x < 1 \\ 2\ln x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

é derivável no ponto de abcissa $x = 1$.

Exemplo:

Mostra que a função definida por $f(x) = |x + 1|$ não é derivável no ponto de abcissa $x = -1$.

Escrevemos $f(x) = |x + 1| = \begin{cases} x + 1 & x \geq -1 \\ -x - 1 & x < -1 \end{cases}$. Observando o gráfico da função, verifica-se que não existe $f'(-1)$ porque os declives das semirretas tangentes ao gráfico no ponto $\left(-1,0\right)$ são diferentes. Analiticamente:

$$f_{-}'(-1) = \lim_{x \to -1^{-}} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim_{x \to -1^{-}} \frac{-x-1-0}{x+1} = -1$$

$$f_{+}'(-1) = \lim_{x \to -1^{+}} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim_{x \to -1^{+}} \frac{x+1-0}{x+1} = 1$$

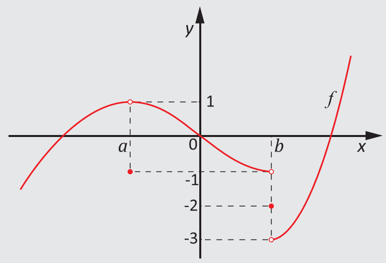
Repara que as derivadas laterais existem, mas são diferentes.

Logo não existe a derivada $f'(-1)$.

> Uma função tem derivada (é derivável) num ponto quando as derivadas laterais (a direita e a esquerda), neste ponto, existem e são iguais.
>
> Se não existem as derivadas laterais num ponto ou, se existem e são diferentes então a função não é derivável nesse ponto.

Tarefa 5

Considera a função de domínio representada no gráfico:



1. Determina os limites:

   a) $\lim_{x \to a^{+}} \frac{f(x) - f(a)}{x-a}$

   b) $\lim_{h \to 0} \frac{f(b+h) - f(b)}{h}$

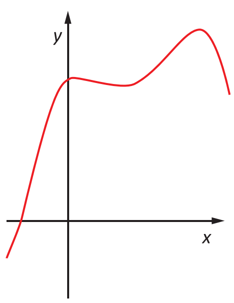
2. Indica, se existirem, valores para $f(a)$ de modo que:

   a) f seja contínua em $x = a$

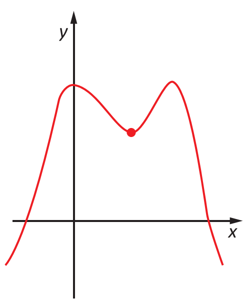
   b) f seja derivável em $x = a$

Derivabilidade e continuidade

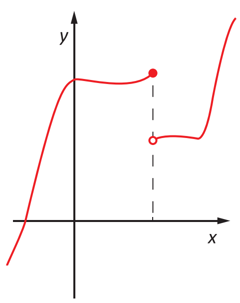
A continuidade e a derivabilidade de uma função estão relacionadas. Uma função pode ser contínua num ponto e não ter derivada nesse ponto, mas uma função descontínua num ponto não é derivável nesse ponto.



Função contínua e derivável



Função contínua e não derivável



Função não contínua e não derivável

> Toda a função derivável num ponto é contínua nesse ponto.

Regra de conversão:

$a \Rightarrow b$ é verdadeira, então também é verdadeira a afirmação que $\sim b \Rightarrow \sim a$.

Desta afirmação também se conclui que (regra de conversão), se uma função é descontínua num ponto, então não é derivável nesse ponto.

Tarefa 6

Verifica se cada uma das funções é contínua e tem derivada no ponto indicado.

a) $f(x)=\begin{cases} 2x-1 \ , \ x\leq 0 \\ x^2 \ \ \ \ \ \ \ , \ x>0 \end{cases}$, em $x_0=0$

b) $g(x)=2|x-1|$,

b.1 em $x_0=1$

b.2 em $x_0=3$

Exemplo:

Considera a função definida por $f(x)=\begin{cases} (x-3)^2+2 & \text{se } x\neq 3 \\ 0 & \text{se } x=3 \end{cases}$.

Verifica-se que quando x se aproxima de 3, temos que:

$$\lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{x\to 3}[(x-3)^2+2]=(3-3)^2+2=2.$$

Então, *f* não é contínua para $x=3$ porque $2\neq f(3)=0$.

Por outro lado, derivando à esquerda do ponto $x=3$, temos:

$$f\_'(3)=\lim_{x\to 3^-}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3^-}\frac{(x-3)^2+2-0}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to 3^-}\frac{x^2-6x+11}{x-3}=\frac{9-18+11}{0^-}=-\infty$$

Ou, derivando à direita do ponto,

$$f_+'(3)=\lim_{x\to 3^+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}\frac{(x-3)^2+2-0}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-6x+11}{x-3}=\frac{9-18+11}{0^+}=+\infty$$

- Logo, a função não é derivável no ponto de abcissa $x=3$.

Nota:

A função derivada de $y=f(x)$ também pode ser indicada por: $\frac{df}{dx}$, y_x', $\frac{dy}{dx}$ (lê- se, derivada de y em relação a x).

Função derivada

Para todo o $x\in Df$ em que a função é derivável, chama-se **função derivada** de *f* à função definida por: $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Tarefa 7

Determina qual a função derivada de cada uma das funções reais de variável real definidas por:

a) $f(x)=x^3$

b) $g(x)=\frac{1}{x}$

Exemplo:

Dada a função $f(x)=3x^2$, definida em IR, calcular a expressão da sua função derivada.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{3(x+h)^2-3x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3\left[x^2+2xh+(h)^2\right]-3x^2}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{3x^2+6xh+3(h)^2-3x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(6x-3h)}{h}=6x$$

Ou seja, $f'(x)=6x, \ \forall x\in IR$.

Exemplo:

Dada a função $g(x)=e^x$, definida em IR, calcular a expressão da sua função derivada.

Ora, $g'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^x.e^h-e^x}{h}=e^x\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=e^x\times 1$

Ou seja, $g'(x)=e^x,\ \forall x\in IR$.

Regras de derivação:

O cálculo da derivada através da sua definição nem sempre é simples, pois envolve o cálculo do limite de uma razão incremental (quociente de Newton). Para minimizar este problema, utilizamos algumas propriedades das derivadas, que chamamos **regras de derivação**.

Exemplos:

a) Recorrendo à regra $(x^k)'=kx^{k-1}, k\neq 0$ (de uma potência) temos:

$(x^3)'=3x^{3-1}=3x^2$ ou $(x^{-5})'=-5x^{-5-1}=-5x^{-6}=-\frac{5}{x^6}$

b) Recorrendo à regra $(a^x)'=a^x.\ln a\ \ (a>0, a\neq 1)$ (derivada da exponencial) temos que $(5^x)'=5^x \ln 5$.

c) Recorrendo à regra $(\ln x)'=\frac{1}{x\ln a}\ \ (a>0, a\neq 1)$ (derivada do logaritmo natural) temos que $(\log_2 x)'=\frac{1}{x\ln 2}$.

Usando as propriedades das funções e as proposições anteriores é possível demonstrar outras regras de derivação que resultam das operações algébricas com funções.

Vejamos as seguintes:

Regras práticas:

Seja $y=f(x)$ uma função derivável em $x\in Df$ e $y'=f'(x)$ a expressão da sua derivada. Então:

$y=k\ \ (k\in IR)$	$y'=0$
$y=x$	$y'=1$
$y=x^n\ \ (k\in IR)$	$y'=nx^{n-1}$
$y=x^k\ \ (k\neq 0)$	$y'=kx^{k-1}$
$y=sen(x)$	$y'=cos(x)$
$y=cos(x)$	$y'=-sen(x)$
$y=ln(x)\ \ (a>0, a\neq 1)$	$y'=\frac{1}{x}$
$y=a^x$	$y'=a^x.\ln a$
$y=log_a(x)$	$y'=\frac{1}{x\ln a}$

Sejam f, g duas funções deriváveis em $x \in (Df \cap Dg)$ e $f'(x)$ e $g'(x)$ as expressões das respetivas derivadas. Então:

- O produto de uma constante por uma função é derivável e:

$$(k.f)'(x) = k.f'(x) \ (k \neq 0)$$

- A soma $(f+g)$ é derivável e temos a regra:

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

- A diferença $(f-g)$ é derivável e temos a regra:

$$(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$$

- O produto $(f.g)$ é derivável e temos a regra:

$$(f \times g)'(x) = f'(x) \times g(x) + f(x) \times g'(x)$$

- O quociente $(\frac{f}{g}),\ g(x) \neq 0$ é derivável e temos a regra:

$$(\frac{f}{g})'(x) = \frac{f'(x) \times g(x) - f(x) \times g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}$$

Tarefa 8

Usa as regras para obter as derivadas:

a) $(x^2 + 3x - 1)'$

b) $(x^7 - 2x^3)'$

c) $(4e^x)'$

d) $(\frac{\ln x}{x})'$

e) $(\log_2 x - x)'$

f) $(2\sin x - \cos x)'$

Exemplo:

Determina a expressão da derivada da função afim definida por $f(x) = ax + b \ (a, b \in IR)$.

Seja $x_0 \in Df$, um ponto arbitrário.

1. Usando as regras de derivação,

$$f'(x) = (ax+b)' = (ax)' + b' = a + 0 = a.$$

2. Por definição,

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{ax_0 + ah + b - (ax_0 + b)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{ah}{h} = a.$$

Tarefa 9

Seja $f(x) = x^e$ a expressão de uma função real de variável real.

a) Determina $f'(x)$

b) Escreve a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $x = 1$.

Exemplo:

Usar as regras práticas de derivação para obter as expressões das derivadas das funções definidas por:

a) $f(x) = x^4 - 2x^3$

$f'(x) = (x^4 - 2x^3)' = (x^4)' - (2x^3)'$ (pela regra da derivada da soma)

$= 4x^3 - [2' \times (x^3) + 2 \times (x3)']$ (pela regra da derivada do produto)

$= 4x^3 - (0 + 2 \times 3x^2)$ (pela regra da derivada de uma constante)

$= 4x^3 - 6x^2$.

b) $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x}$

(Recorrendo à derivada do quociente de funções e...)

$f'(x) = (\dfrac{x^2+3}{x})' = \dfrac{(x^2+3)'.x - (x^2+3).x'}{x^2} =$

$= \dfrac{2x.x - x^2 - 3}{x^2} = \dfrac{x^2-3}{x^2}$

c) $f(x) = 5x^4(x-1)$

(Recorrendo à derivada do produto de funções e...)

$f'(x) = (5x^4)'.(x-1) + 5x^4.(x-1)' =$

$= 5 \times 4x^3(x-1) + 5x.(x'-1') = 20x^3(x-1) + 5x$.

Exemplo:

Uma partícula de poeira desloca-se de acordo com a lei $e(t) = 5t^2 + 20t$, sendo $e(t)$ a distância percorrida em metros ao fim de t segundos. Calcula a velocidade instantânea aos 3 segundos.

Ora, como a velocidade é dada pela derivada, temos que

$e'(t) = \left(5t^2 + 20t\right)' = 10t + 20$. Logo, $e'(3) = 10 \times 3 + 20$.

A velocidade aos 3 segundos é de 50 m/s.

Tarefa 10

Um balão meteorológico é solto e sobe verticalmente de modo que a sua distância $d\ (t)$ ao solo durante os primeiros 10 segundos de subida é dada por $d(t) = 6 + 2t + t^2$, na qual $d(t)$ é medido em metros e t em segundos.

a) Determina a velocidade média do balão durante os dois primeiros segundos da subida.

b) Determina a velocidade instantânea do balão quando $t=1$ segundo.

Tarefa 11

Determina as expressões das derivadas das funções compostas:

a) $h(x) = \cos(2x^3)$

b) $h(x) = e^{3x^2+2x}$

c) $h(x) = \ln(x^2 - 1)$

d) $h(x) = \dfrac{3x^2 + 5x - 1}{x - 1}$

e) $h(x) = \sqrt[3]{(3x^2 + 6x - 2)^2}$

f) $h(x) = e^{2\cos(2x)}$

Tarefa 12

Usa as regras práticas de derivação para obter as expressões das derivadas das funções definidas por:

a) $y = (e^x + x - 1)^3$

b) $y = 5x^2(\ln x + x)$

c) $y = \sqrt{1 + \log_2 x}$

d) $y = \sqrt[3]{e^{2x}}$

e) $y = \dfrac{2e^x}{x^2 + 1}$

f) $y = \dfrac{2x}{1 - \ln x}$

g) $y = 2e^{-x^2}$

h) $y = \ln(\dfrac{2 - x}{x + 1})$

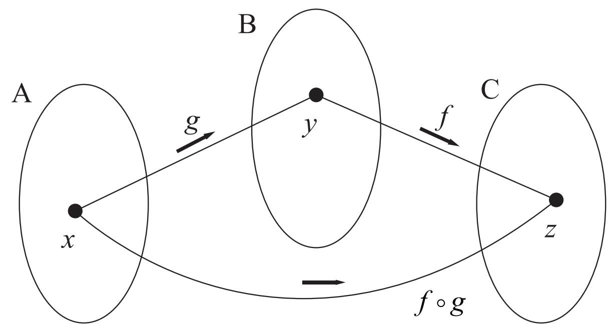
i) $y = (x + 1) \times 3^{x^2}$

j) $y = \dfrac{2^x + 1}{2^{x+1}}$

k) $y = \log_2 \dfrac{x + 1}{x - 1}$

l) $y = \ln \sqrt{\dfrac{1}{x}}$

Derivação de uma função composta



Dadas duas funções f e g, a composta $f \circ g$ (lê-se f composta com g), é uma função definida por:

$$D_{fog} = \left\{x \in IR : x \in Dg \wedge g(x) \in Df\right\}$$

$$(f \circ g)(x) = f\left[g(x)\right], \forall x \in D_{f \circ g}$$

Exemplo:

Sendo $f(x) = 3x^2$ e $g(x) = 5x - 1$, então:

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(5x - 1) = 3(5x - 1)^2,\ \forall x \in IR$

Teorema da derivada da função composta:

Sejam f e g duas funções reais de variável real tais que $Df \subseteq CDg$ e $f'(x)$ e $g'(x)$ as expressões das respetivas derivadas.

Se g é derivável no ponto x e f é derivável no ponto $y = g(x)$, então a função composta $f \circ g$ é derivável em x e tem-se a seguinte regra prática: $(f \circ g)'(x) = f'\left[g(x)\right]g'(x),\ \forall x \in D_{f \circ g}$.

Exemplo:

Sejam as funções definidas por $f(x) = 3x^2$ e $g(x) = 5x - 1$, então,

$(f \circ g)'(x) = f'(5x - 1).(5x - 1)' = 6(5x - 1) \times 5 = 30 \times (5x - 1)$

Exemplo:

Seja $h(x)=\sqrt{x^3+2x}$.

$$\underbrace{x \rightarrow g(x)=x^3+2x \rightarrow h(x)=\sqrt{x^3+2x}}_{g \qquad\qquad f} \quad ,\forall x \in D(fog)$$

Pela composta, $h(x)=(f\circ g)(x)$, sendo $f(x)=\sqrt{x}$ e $g(x)=x^3+2x$

Pela regra de derivação da composta, temos $h'(x)=g'(x).f'(g(x))$

Ou seja, como $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ e $g'(x)=3x^2-2$, então $h'(x)=\dfrac{3x^2-2}{2\sqrt{x^3-2x}}$.

Exemplo:

Seja $i(x)=e^{\cos x}$. Pela composta, $i(x)=(f\circ g)(x)$, sendo $f(x)=e^x$ e $g(x)=\cos x$.

Sendo $f'(x)=e^x$ e $g'(x)=-senx$, então,

pela regra de derivação da composta, temos:

$i'(x)=f'(g(x)).g'(x)=-senx\ e^{\cos x} \quad ,\forall x\in IR$.

Segunda derivada de uma função

Seja f uma função real de variável real e f' a sua função derivada num ponto x_0 do seu domínio. Se f' admite também derivada no ponto x_0, então diz-se que f é duas vezes derivável no ponto x_0 e tem-se:

$$f''(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h}.$$

Chama-se função segunda derivada (ou função derivada de ordem 2) de uma função f a uma nova função tal que:

- Domínio de f'' é o conjunto em que f' tem derivada;
- A cada ponto do domínio faz corresponder a derivada da derivada da função nesse ponto.

Exemplo:

Definir as expressões da primeira e a segunda derivada das funções definidas em IR por:

a) $f(x)=(2x-1)^3$

A primeira derivada é dada por: $f'(x)=3\times 2\times(2x-1)^2$

Regras práticas das derivadas

Seja $u=f(x)$ uma função derivável em $x\in Df$ e $u'(x)$ a expressão da sua derivada. Então:

$(u+v)'=u'+v'$

$(k.u)'=k.u' \ \ \forall k\in IR$

$(u.v)'=u'v-u.v'$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

$(u^n)'=nu^{n-1}.u'$

$(\sqrt{u})'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

$(\sqrt[n]{u})'=\dfrac{u'}{2\sqrt[n]{u^{n-1}}}$

$(e^u)'=u'e^u$

$(sen\ u)'=u'\cos u$

$(\cos\ u)'=-u'sen\ u$

$(tgu)'=\dfrac{u'}{'\cos^2 u}$

$(ln\ u)'=\dfrac{u'}{u}$

$(log_a u)'=\dfrac{u'}{u.\ln a}$ $(a>0, a\neq 1)$

$(a^u)'=u'a^u.\ln a$

A 2ª derivada é a derivada da primeira derivada, ou seja:

$f''(x) = 12 \times 2 \times (2x-1) = 48x - 24$.

Derivadas sucessivas

De modo similar a derivada da segunda derivada é chamada de *terceira derivada*. Podemos nos referir às derivadas sequentes à terceira derivada de f por: quarta, quinta, sexta, ... e sucessivamente.

$$\frac{df}{dx}, \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right), \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)\right), \ldots$$

ou, ainda,

$$\frac{df}{dx}, \frac{d^2 f}{dx^2}, \frac{d^3 f}{dx^3}, \ldots, \frac{d^n f}{dx^n}, \ldots$$

$n \in IN$

A notação mais usual para as derivadas de ordem superior é:

$f'(x), f''(x), f'''(x), f^{(iv)}(x), \ldots, f^{(n)}(x)$

$n \in IN$

$f^{(n)}(x)$ (lê-se derivada de ordem n)

b) $g(x) = \frac{1}{x}$

Ora, $g'(x) = (\frac{1}{x})' = (x^{-1})' = -1 \times x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$.

Para a 2ª derivada, usamos a regra da derivada de um quociente. Ou seja, $g''(x) = -\frac{1}{x^2} = -\frac{1' \times x^2 - 1 \times (x^2)'}{(x^2)^2} = \frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}$.

c) $h(x) = \frac{x}{\ln x}$

Ora, $h'(x) = \frac{x' \times \ln x - x \times (\ln x)'}{(\ln x)^2} = \frac{1 \times \ln x - x \times \frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$

Para a 2ª derivada, usamos a regra da derivada de um quociente. Ou seja, $h''(x) = \frac{\frac{1}{x} \times \ln^2 x - \frac{2}{x} \ln x \times (\ln x - 1)}{(\ln^2 x)^2} = \frac{\ln^2 x - 2\ln^2 x + 2\ln x}{x \ln^4 x}$

Simplificando a expressão, temos: $h''(x) = \frac{2 - \ln x}{x \ln^3 x} \quad , \forall x > 0$.

d) $i(x) = x \log_2 x$

Pela regra da derivada de um produto, temos:

$i'(x) = x' \log_2 x - x(\log_2 x)'$. Ou seja,

$i'(x) = \log_2 x - \frac{x}{x \ln 2}$.

E a 2º derivada é dada por: $i''(x) = \frac{1}{x \ln 2} - (\frac{1}{\ln 2})'$. E, como $(\frac{1}{\ln 2})' = 0$ então, $i''(x) = \frac{1}{x \ln 2}$.

Tarefa 13

Define a primeira e a segunda derivada das funções definidas por:

a) $f(x) = \frac{2x-3}{3x+2}$

b) $g(x) = x\sqrt{4-x^2}$

c) $h(x) = \log(x^2 - 5x + 6)$

d) $i(x) = e^{2x} . \ln x$

e) $j(x) = (\ln 2x)^2$

Exemplo:

Encontrar as primeiras derivadas de ordem n das funções definidas por:

a) $f(x) = 8x^4 + 5x^3 - x^2 + 7$

Ora,

$f'(x) = 32x^3 + 15x^2 - 2x$

$f''(x) = 96x^2 + 30x - 2$

$f'''(x) = 192x + 30$